3.9

2. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Para cualquier valor de a se tiene que rango M = 2.

det $M^* = (1 - a)(a + 8) = 0 \Rightarrow a = 1;\ a = -8$

1.er caso: $\forall a \in \mathbf{R} - \{1, -8\} \Rightarrow$ rango M = 2, como rango $M^* = 3$, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.° caso: Para $a = 1 \Rightarrow$ rango M = rango $M^* = 2$. El sistema es compatible determinado; solución únic

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ x + 3y &= 4 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}\right.$$

3.er caso: Para $a = -8 \Rightarrow$ rango M = rango $M^* = 2$. El sistema es compatible determinado; solución ú

$$\left.\begin{aligned} 2x - y &= -8 \\ -8x + 3y &= 4 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 10 \\ y &= 28 \end{aligned}\right.$$

3. $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad M^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$

det $M = (1 - a)(a + 1) = 0$

1.er caso: $\forall a \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, se verifica que rango M = rango $M^* = 3$; por tanto, el sistema es comp determinado; tiene solución única. Por Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{2 - a}{a - 1} \qquad y = 1 \qquad z = -\frac{1}{a - 1} + a + 2$$

2.° caso: Para $a = -1$

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 4 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -x + y + z &= 4 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -x + y &= 4 - z \\ x + y &= 1 - z \end{aligned}\right\}$$

$$x = -\frac{3}{2} \qquad y = -\frac{2k - 5}{2} \qquad z = k$$

3.er caso: Para $a = 1$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 4 \\ x - y + z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

De la primera y tercera ecuación se deduce que el sistema es incompatible; no tiene solución.

4. $M = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 2 & -13 & 2 \\ a + 2 & -12 & 12 \end{pmatrix}$

Como es un sistema lineal homogéneo, para que tenga soluciones distintas de la trivial tiene que ocur rango $M < 3 \Rightarrow$ det $M = 76(a - 10)$.

1.er caso: $\forall a \in \mathbf{R} - \{10\}$, se deduce que det $M \neq 0$, de donde rango M = 3 y, en consecuencia, s la solución trivial:

$$x = 0 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

2.° caso: Para $a = 10$

$$\left.\begin{aligned} 4x + 12y + 4z &= 0 \\ 2x - 13y + 2z &= 0 \\ 12x - 12y + 12z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + 3y + z &= 0 \\ 2x - 13y + 2z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 2x + 2z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= k \\ y &= 0 \\ z &= -k \end{aligned}\right.$$

El sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro

5. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{pmatrix}$ $\qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{pmatrix}$

det $M = 36 - 5a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{36}{5}$

1.er caso: $\forall a \in \mathbf{R} - \left\{\dfrac{36}{5}\right\}$, se deduce que det $M \neq 0$ y, en consecuencia, rango M = 3 = rango M^*. Por tanto, el sistema es compatible determinado; tiene solución única.

Aplicando la regla de Cramer, obtenemos la solución en función de a:

$$x = \frac{2(3a - 23)}{5a - 36} \qquad y = \frac{2a - 14}{5a - 36} \qquad z = \frac{2}{5a - 36}$$

2.° caso: Para $a = \dfrac{36}{5}$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ 5x - y + \tfrac{36}{5}z &= 6 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - y + 3z &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + 2y &= 2 - z \\ 2x - y &= 2 - 3z \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{-7k + 6}{5} \qquad y = \frac{k + 2}{5} \qquad z = k$$

6. $M = \begin{pmatrix} a^2 & a^3 & a \\ 1 & a^2 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad M^* = \begin{pmatrix} a^2 & a^3 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Estudiamos el rango de la matriz M.

Vemos que para $a = 0$ o para $a = 1$ rango $M < 2$. Hagamos la discusión para los distintos valores del parámetro a.

1.er caso: $\forall a \in \mathbf{R} - \{0, 1\}$, se deduce que rango M = 2 = rango M^*. Por tanto, el sistema es compatible uniparamétrico. Aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{1}{a(a - 1)} \qquad y = \frac{-ak(a - 1) - 1}{a^3(a - 1)} \qquad z = k$$

2.° caso: Para $a = 0$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 1 \\ x + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema incompatible; no existe solución.

3.er caso: Para $a = 1$

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema incompatible; no existe solución.

3.10. **Discutir y resolver, según los distintos valores del parámetro k, los siguientes sistemas:**

1. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ 3x + y + 3z = 4 \\ kx + y - 7z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ky + 3z = 3 \\ y = z \\ 3y - z = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + t = 4 \\ y + z = 1 \\ y + t = 2 \\ z + t = k \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ kx - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ kx + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - y - z = k \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ k & 1 & -7 \end{pmatrix}$ $\quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 3 & 4 \\ k & 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det M^* = 30k - 114 = 0 \Rightarrow k = \frac{19}{5}$

1.er caso: $\forall a \in \mathbf{R} - \left\{\frac{19}{5}\right\}$, $\det M^* \neq 0$, rango $M^* = 4 \neq$ rango $M = 3$, el sistema es incompatible; no hay solución.

2.º caso: Para $a = \frac{19}{5} \Rightarrow$ rango M = rango $M^* = 3$; por tanto, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ \frac{19}{5}x + y + 3z = 4 \\ \frac{19}{5}x + y - 7z = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ \frac{19}{5}x + y + 3z = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{1}{10} \\ z = \frac{1}{10} \end{cases}$$

2. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ k & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \det M^* = 16 - 8k = 0 \Rightarrow k = 2$

1.er caso: $\forall k \in \mathbf{R} - \{2\}$, se deduce que $\det M^* \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M^* = 4$, como rango M = 3, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = 2 \Rightarrow$ rango M = rango $M^* = 3$; el sistema es compatible determinado; solución única:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$$

Restando la primera y la cuarta ecuación, se obtiene y = 2, y sustituyendo en las otras, se obtiene: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

3. $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \det M^* = 13k - 31 = 0 \Rightarrow k = \frac{31}{13}$

1.er caso: $\forall k \in \mathbf{R} - \left\{\frac{31}{13}\right\}$, se deduce que $\det M^* \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M^* = 4$, como rango M = 3, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = \frac{31}{13} \Rightarrow$ rango M = rango $M^* = 3$; por tanto, el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y - z = \frac{31}{13} \\ x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ x - y + 2z = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{19}{13} \quad y = -\frac{2}{13} \quad z = \frac{9}{13}$$

4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det M^* = 8 - 2k = 0 \Rightarrow k = 4$

1.er caso: $\forall k \in \mathbf{R} - \{4\}$, se deduce que $\det M^* \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M^* = 4$, como rango M = 3, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = 4 \Rightarrow$ rango M = rango $M^* = 3$. Por tanto, el sistema es compatible determinado; solución única:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + 4y + 3z = 3 \\ y = z \\ 3y - z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

5. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ k & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ k & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

$\det M^* = 12 - 12k = 0 \Rightarrow k = 1$

1.er caso: $\forall k \in \mathbf{R} - \{1\}$, se deduce que $\det M^* \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M^* = 4$, como rango M = 3, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = 1 \Rightarrow$ rango M = rango $M^* = 3$. Por tanto, el sistema es compatible determinado; solución única:

$$\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + y - z = 4 \\ x + y + 3z = 6 \\ x - 2z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

6. $M = \begin{pmatrix} k & k & -1 \\ 3 & -k & 0 \\ 5 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad M^* = \begin{pmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\det M^* = -40k = 0 \Rightarrow k = 0$

1.er caso: $\forall k \in \mathbf{R} - \{0\}$, se deduce que $\det M^* \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M^* = 4$, como rango M = 3, el sistema es incompatible, no existe solución.

2.º caso: Para k = 0, rango M = 2; rango $M^* = 3$. Por tanto, el sistema es incompatible, no existe solución.

7. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

$\det M^* = 10 - 2k = 0 \Rightarrow k = 5$

1.er caso: $\forall k \in \mathbf{R} - \{5\}$, se deduce que $\det M^* \neq 0$ y, en consecuencia, rango $M^* = 5$, como rango M = 4, el sistema es incompatible; no existe solución.

2.º caso: Para $k = 5 \Rightarrow$ rango M = rango $M^* = 4$. Por tanto, el sistema es compatible determinado; solución única:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + t = 4 \\ y + z = 1 \\ y + t = 2 \\ z + t = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

3.13. **Discutir y resolver, según los distintos valores de los parámetros λ y μ, los siguientes sistemas:**

1. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ \lambda^2 x + \mu y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ y - z = -1 \\ 2x - y + \lambda z = \mu \end{cases}$

3. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + \lambda z = \mu \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = \mu \\ 2x - 5y + \lambda z = -2 \end{cases}$

Formamos las matrices de coeficientes y ampliada.

1. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \lambda^2 & \mu \end{pmatrix}$ $\qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \lambda^2 & \mu & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \text{si } \mu = 2 \Rightarrow \lambda = \pm 2 \quad rg\, M^* = 1 \\ \text{si } \mu \neq 2 \Rightarrow rg\, M^* = 2 \end{cases}$

$\det M = 2\mu - \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \dfrac{\lambda^2}{2}$

MAL EL RANGO PODRÍA SER 1 ó 2)

1.^{er} caso: Si $\mu = \dfrac{\lambda^2}{2} \Rightarrow$ rango $M = 1$ y rango $M^* = 2$, entonces el sistema es incompatible; no tiene solución.

2.° caso: Si $\mu \neq \dfrac{\lambda^2}{2} \Rightarrow$ rango M = rango $M^* = 2$. El sistema es compatible determinado; solución única.

Por la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{2 - \mu}{\lambda^2 - 2\mu} \qquad y = \frac{\lambda^2 - 4}{\lambda^2 - 2\mu}$$

2. $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\qquad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$

$\det M = 2(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3$

Sustituimos $\lambda = 3$ en la matriz M^* y calculamos el rango:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & \mu \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & \mu - 3 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 5 \end{pmatrix}$$

Así pues: si $\mu = 5 \Rightarrow$ rango $M^* = 2$
si $\mu \neq 5 \Rightarrow$ rango $M^* = 3$

1.^{er} caso: $\forall \lambda \in \mathbf{R} - \{3\} \Rightarrow \det M \neq 0 \Rightarrow$ rango $M = 3$ y rango $M^* = 3$.

Sistema compatible determinado, solución única. Aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{2\lambda - \mu - 1}{\lambda - 3} \qquad y = \frac{\mu - \lambda - 2}{\lambda - 3} \qquad z = \frac{\mu - 5}{\lambda - 3}$$

2.° caso: Para $\lambda = 3$ y $\mu \neq 5$, se deduce que rango $M = 2$ y rango $M^* = 3$; por tanto, el sistema es incompatible; no existe solución.

3.^{er} caso: Para $\lambda = 3$ y $\mu = 5$, se deduce que rango $M = 2$ y rango $M^* = 2$; por tanto, el sistema es compatible uniparamétrico, existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$$x = 3k \qquad y = 1 - 3k \qquad z = 2 - 3k$$

3. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ $\qquad M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$

$\det M = 5\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$

Sustituimos $\lambda = 0$ en la matriz M^* y calculamos el rango:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -12 \\ 0 & 5 & -4 & \mu - 8 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -4 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & \mu + 4 \end{pmatrix}$$

Así pues: si $\mu = -4 \Rightarrow$ rango $M^* = 2$
si $\mu \neq -4 \Rightarrow$ rango $M^* = 3$

1.^{er} caso: $\forall \lambda \in \mathbf{R} - \{0\} \Rightarrow \det M \neq 0 \Rightarrow$ rango $M = 3$ y rango $M^* = 3$.

Sistema compatible determinado, solución única. Aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = -\frac{2\lambda + \mu + 4}{5\lambda} \qquad y = -\frac{4(3\lambda - \mu - 4)}{5\lambda} \qquad z = \frac{\mu + 4}{\lambda}$$

2.° caso: Para $\lambda = 0$ y $\mu \neq 4$, se deduce que rango $M = 2$ y rango $M^* = 3$; por tanto, el sistema es incompatible; no existe solución.

3.^{er} caso: Para $\lambda = 0$ y $\mu = -4$, se deduce que rango $M = 2$ y rango $M^* = 2$; por tanto, el sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$$x = 4k \qquad y = -4 - 16k \qquad z = -2 - 20k$$

4. $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & \lambda \end{pmatrix}$ $\qquad M^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \mu \\ 2 & -5 & \lambda & -2 \end{pmatrix}$

$\det M = 13\lambda - 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$

Sustituimos $\lambda = 1$ en la matriz M^* y calculamos el rango:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \mu \\ 2 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\substack{C_2 - 4C_1 \\ C_3 - C_1}}{=} \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & -13 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \mu \\ 2 & -13 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{F_1 - F_3}{=} \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & \mu \\ 2 & -13 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Así pues: si $\mu = 3 \Rightarrow$ rango $M^* = 2$
si $\mu \neq 3 \Rightarrow$ rango $M^* = 3$

1.^{er} caso: $\forall \lambda \in \mathbf{R} - \{1\} \Rightarrow \det M \neq 0 \Rightarrow$ rango $M = 3$ y rango $M^* = 3$.

Sistema compatible determinado; solución única. Aplicando la regla de Cramer, se obtiene:

$$x = \frac{\lambda(\mu + 4) - 10\mu + 23}{13(\lambda - 1)} \qquad y = \frac{3\mu - 1}{13} - \frac{\mu - 3}{13(\lambda - 1)} \qquad z = \frac{\mu - 3}{\lambda - 1}$$

2.° caso: Para $\lambda = 1$ y $\mu \neq 3$, se deduce que rango $M = 2$ y rango $M^* = 3$; por tanto, el sistema es incompatible; no existe solución.

3.^{er} caso: Para $\lambda = 1$ y $\mu = 3$, se deduce que rango $M = 2$ y rango $M^* = 2$; por tanto, el sistema es compatible uniparamétrico; existen infinitas soluciones que dependen de un parámetro.

$$x = 5k \qquad y = \frac{5k + 5}{9} \qquad z = \frac{65k + 7}{9}$$